1 ст математика 11.12.23

Тема: «Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке»

$f(x)$	$f'(x)$
C - const	0
x	1
$Kx + b$	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n * x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
sin x	cosx
cosx	- sinx
e^x	e^x
a^x	$a^x * \ln a$
lna	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x * \ln a}$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctgx	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Для примера:

$f(x) = 5x^2 - 4x + 5$ на $[0; 3]$

$f'(x) = 10x - 4$,

$f'(x) = 0$,

$10x - 4 = 0$,

$10x = 4$,

$x = 0,4$,

$f(0) = 5 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 5 = 5$ -наименьшее

$f(0,4) = 5 \cdot 0,4^2 - 4 \cdot 0,4 + 5 = 7,4$

$f(3) = 5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 38$ – наибольшее.

В N 305 примерах б) и г) для вычисления производной используем правило

$$(U \cdot V)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$$

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

■ **Пример 1.** Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на отрезке $[-2; 0]$.

Сначала найдем критические точки. Так как производная $y'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ определена для любого x, остается решить уравнение $y'(x) = 0$. Решая его, находим $x = -1$ и $x = 2$.

Теперь нужно выбрать наибольшее и наименьшее из чисел $y(-2) = -1$, $y(-1) = 4{,}5$ и $y(0) = 1$ (критическая точка $x = 2$ не принадлежит рассматриваемому отрезку). Ясно, что наименьшее значение достигается в точке -2 и равно -1, а наибольшее — в точке -1 и равно $4{,}5$. Коротко это записывается так:

$$\max_{[-2;\,0]} y(x) = y(-1) = 4{,}5; \quad \min_{[-2;\,0]} y(x) = y(-2) = -1.$$

Изложенный выше метод поиска наибольших и наименьших значений функции применим к решению разнообразных прикладных задач. При этом действуют по следующей схеме:

1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию $f(x)$;

2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;

3) выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию (перевод исходной задачи на язык математики); 2) решение полученной математической задачи и 3) интерпретацию найденного решения («перевод» его с языка математики в терминах первоначальной задачи).

С этим общим методом (его называют методом математического моделирования) вы уже знакомы, по описанной схеме решались текстовые задачи в курсе алгебры. Приведем пример его применения.

■ **Пример 2.** Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам (рис. 114) квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

Решение. 1) Обозначим через x длину стороны основания коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков рав-

Упражнения

305.— Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на промежутках $[-1; 1]$ и $[0; 3]$;

б) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ на промежутках $[-4; -1]$ и $[1; 3]$;

в) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ на промежутках $[0; 2]$ и $[2; 3]$;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ на промежутках $[-3; -2]$ и $[1; 5]$.